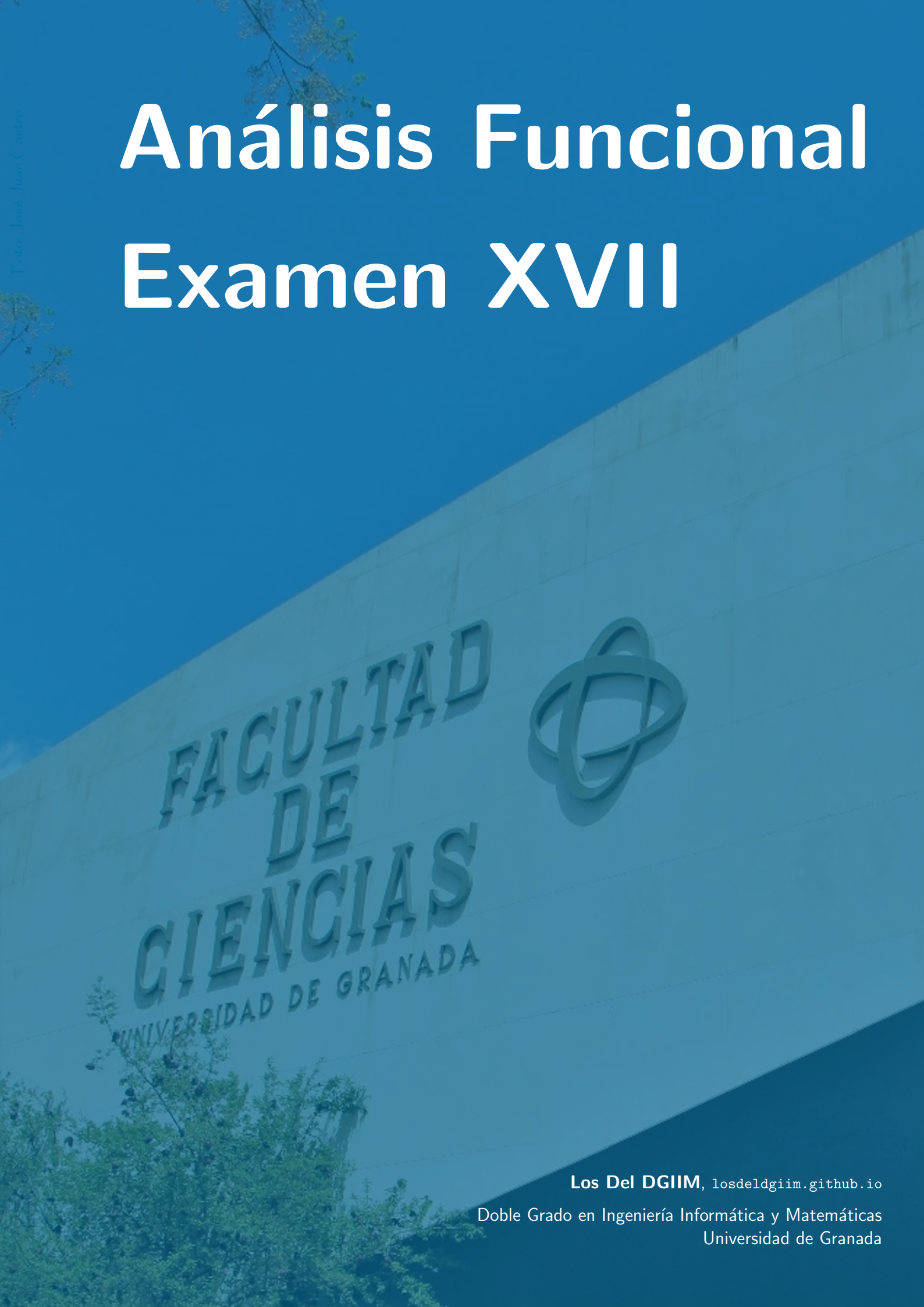
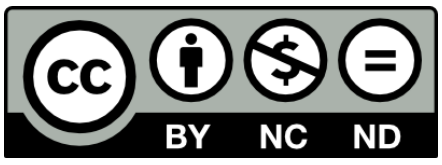
Análisis Funcional
Examen XVII



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Análisis Funcional
Examen XVII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2026

Asignatura Análisis Funcional.

Curso Académico 2024/2025.

Grado Matemáticas.

Profesor Miguel Martín Suárez.

Descripción Parcial 2.

Fecha 4 de diciembre de 2024.

Ejercicio 1. En el espacio de Banach $X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ se considera el funcional lineal φ definido por

$$\varphi(f) = \int_0^1 (2t-1)f(t)\,dt \quad \forall f \in C[0,1].$$

a) Pruebe que φ es continuo y calcule su norma.

b) ¿Alcanza φ su norma? Justifique su respuesta.

c) ¿Existe $x^{**} \in X^{**}$ con $\|x^{**}\| = 1$ tal que $x^{**}(\varphi) = \|\varphi\|$? Justifique su respuesta.

Ejercicio 2. Rodee las afirmaciones verdaderas (que pueden ser una, dos, tres o cuatro):

a) Sea X un subespacio cerrado de ℓ_{3000} de dimensión infinita ¿Puede ser X isomorfo a ℓ_1?

   a1) Si, porque $\ell_1 \subseteq \ell_{3000}$

   a2) No, porque $\ell_1 \nsubseteq \ell_{3000}$

   a3) No, porque ℓ_1 es separable y X no lo es

   a4) No, porque X^* es separable y ℓ_1^* no lo es

b) Sea $\psi\colon \ell_2 \to \mathbb{R}$ el funcional lineal dado por $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{n}$ para $x \in \ell_2$:

   b1) ψ alcanza su norma porque ℓ_2 es reflexivo

   b2) ψ alcanza su norma porque ℓ_2 es un espacio de Hilbert

   b3) ψ no alcanza su norma

   b4) ψ no alcanza su norma porque ℓ_2 no es completo

c) Sea $Y = \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ (el espacio vectorial de las sucesiones casi nulas):

   c1) la norma de la suma y la norma del máximo son equivalentes en Y

   c2) la norma de la suma y la norma del máximo no son equivalentes en Y

   c3) cualesquiera dos normas definidas en Y son equivalentes

   c4) no se puede definir ninguna norma en Y

d) En un espacio normado X tomamos un conjunto convexo y cerrado C y un punto $x_0 \notin C$:

   d1) existe $f \in X^*$ tal que $\sup \operatorname{Re} f(C) \leqslant \operatorname{Re} f(x_0)$

   d2) existe $f \in X^*$ tal que $\sup \operatorname{Re} f(C) < \operatorname{Re} f(x_0)$

   d3) no se puede asegurar que C se pueda separar de x_0 si el interior de C es vacío

   d4) existe un único $f \in X^*$ tal que $\sup \operatorname{Re} f(C) \leqslant \operatorname{Re} f(x_0)$

e) Sea Z un espacio normado de dimensión finita:

e1) cualquier aplicación lineal que sale de Z es abierta

e2) cualquier aplicación lineal que llega a Z es continua

e3) cualquier aplicación lineal sobreyectiva que llega a Z es abierta

e4) cualquier aplicación lineal que sale de Z es continua

Solución.

Ejercicio 1. En el espacio de Banach $X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ se considera el funcional lineal φ definido por

$$\varphi(f) = \int_0^1 (2t-1)f(t)\,dt \quad \forall f \in C[0,1].$$

a) Pruebe que φ es continuo y calcule su norma.

Veamos que φ es continuo. Para ello:

$$\begin{aligned}
|\varphi(f)| &= \left|\int_0^1 (2t-1)f(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^1 |2t-1||f(t)|\,dt \\
&\leqslant \|f\|_\infty \int_0^1 |2t-1|\,dt = \|f\|_\infty \left[\int_0^{1/2} (1-2t)\,dt + \int_{1/2}^1 (2t-1)\,dt\right] \\
&= \|f\|_\infty \left[\left(t-t^2\right)\Big|_0^{1/2} + \left(t^2-t\right)\Big|_{1/2}^1\right] = \|f\|_\infty \left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \left(1-1-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right)\right] \\
&= \|f\|_\infty \left[\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\right] = \|f\|_\infty \cdot \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, φ es continuo y $\|\varphi\| \leqslant 1/2$. Veamos ahora que $\|\varphi\| = 1/2$. La función teórica que deberíamos tomar es $f(t) = \operatorname{sign}(2t-1)$, pero esta función no es continua. Sin embargo, podemos aproximarla por funciones continuas. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos por comodidad:

$$I_n = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right].$$

definimos la función continua

$$f_n(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 1/2 - 1/n] \\ 1 & t \in [1/2 + 1/n, 1] \\ \text{lineal} & t \in I_n \end{cases}$$

Notemos que no es necesario dar la expresión explícita de la parte lineal, ya que lo único que nos interesa es que f_n sea continua y que $\|f_n\|_\infty = 1$. Estas funciones se muestran en la Figura 1.

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi(f_n) &= \int_0^1 (2t-1)f_n(t)\,dt \\
&= \int_0^1 (2t-1)(f_n(t) - \operatorname{sign}(2t-1))\,dt + \int_0^1 (2t-1)\operatorname{sign}(2t-1)\,dt = \\
&= \int_{I_n} (2t-1)(f_n(t) - \operatorname{sign}(2t-1))\,dt + \int_0^1 |2t-1|\,dt
\end{aligned}$$

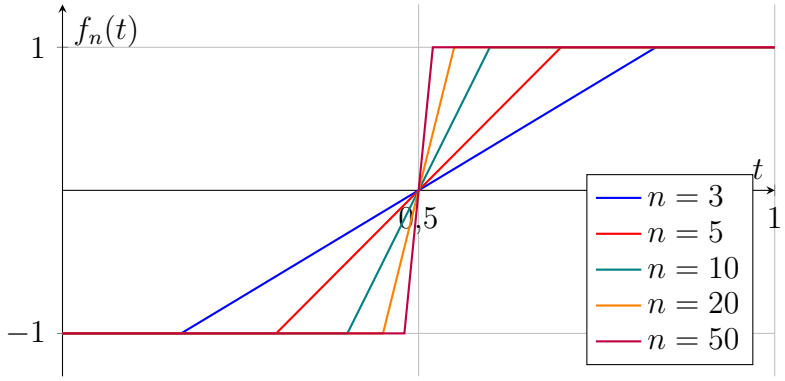


Figura 1: Gráfica de la función f_n para distintos valores de n.

- Por un lado, como hemos comprobado antes, se tiene:

$$\int_0^1 |2t-1|\,dt = \frac{1}{2}.$$

- Por otro lado, para todo $t \in I_n \subset [0,1]$, se tiene que:

$$\begin{aligned} |2t-1| &\leqslant 1 \\ |f_n(t) - \operatorname{sign}(2t-1)| &\leqslant |f_n(t)| + |\operatorname{sign}(2t-1)| \leqslant 1+1=2. \end{aligned}$$

  Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} \left|\int_{I_n} (2t-1)(f_n(t) - \operatorname{sign}(2t-1))\,dt\right| &\leqslant \int_{I_n} |2t-1||f_n(t) - \operatorname{sign}(2t-1)|\,dt \leqslant \\ &\leqslant 2\int_{I_n} dt = 2\lambda(I_n) = 2\cdot\frac{2}{n} = \frac{4}{n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$|\varphi(f_n)| \geqslant \frac{1}{2} - \frac{4}{n}.$$

Por tanto, se deduce que:

$$\|\varphi\| \geqslant \frac{1}{2} - \frac{4}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$, se obtiene que:

$$\|\varphi\| \geqslant \frac{1}{2}.$$

Combinando esto con la desigualdad anterior, se concluye que:

$$\|\varphi\| = \frac{1}{2}.$$

b) ¿Alcanza φ su norma? Justifique su respuesta.

Veamos que φ no alcanza su norma. Supongamos que existe $f_0 \in C[0,1]$ con $\|f_0\|_\infty = 1$ tal que $|\varphi(f_0)| = \|\varphi\| = 1/2$. Entonces, se tendría que:

$$\frac{1}{2} = |\varphi(f_0)| = \left|\int_0^1 (2t-1)f_0(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^1 |2t-1||f_0(t)|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 |2t-1|\|f_0\|_\infty\,dt = \int_0^1 |2t-1|\,dt = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, se tendrían que cumplir todas las desigualdades anteriores como igualdades. En particular, se tendría que:

- Por un lado:

$$\int_0^1 |2t-1||f_0(t)|\,dt = \int_0^1 |2t-1|\|f_0\|_\infty\,dt \Longrightarrow \int_0^1 |2t-1|(\|f_0\|_\infty - |f_0(t)|)\,dt = 0.$$

Como se trata de una integral de una función continua y no negativa, se deduce que:

$$|2t-1|(\|f_0\|_\infty - |f_0(t)|) = 0 \qquad \forall t \in [0,1].$$

De esto se deduce que $|f_0(t)| = \|f_0\|_\infty = 1$ para todo $t \in [0,1] \setminus \{1/2\}$; y como f_0 y la norma son continuas, se deduce que:

$$|f_0(t)| = 1 \qquad \forall t \in [0,1].$$

Notemos que, como f_0 puede tomar valores complejos, no se puede llegar a una contradicción directa.

- Por otro lado, se tendría que:

$$\left|\int_0^1 (2t-1)f_0(t)\,dt\right| = \int_0^1 |2t-1||f_0(t)|\,dt$$

Como $f_0(t)$ puede ser complejo, el valor de la integral puede ser complejo. Por tanto $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\int_0^1 (2t-1)f_0(t)\,dt = e^{i\theta}\left|\int_0^1 (2t-1)f_0(t)\,dt\right| = e^{i\theta}\int_0^1 |2t-1||f_0(t)|\,dt$$

Por lo tanto, multiplicando por $e^{-i\theta}$, se deduce que:

$$\int_0^1 e^{-i\theta}(2t-1)f_0(t)\,dt = \int_0^1 |2t-1||f_0(t)|\,dt$$

Tomando la parte real, se obtiene que:

$$\int_0^1 \Re\left(e^{-i\theta}(2t-1)f_0(t)\right)\,dt = \int_0^1 |2t-1||f_0(t)|\,dt$$

Como $|e^{-i\theta}| = 1$ y la parte real de un número complejo es menor o igual que su módulo, se deduce que:

$$\Re\left(e^{-i\theta}(2t-1)f_0(t)\right) \leqslant |2t-1||f_0(t)| \qquad \forall t \in [0,1].$$

Por lo tanto, se tendría que:

$$\int_0^1 \left(|2t-1||f_0(t)| - \Re\left(e^{-i\theta}(2t-1)f_0(t)\right)\right)\, dt = 0$$

Como se trata de una integral de una función continua y no negativa, se deduce que:

$$|2t-1||f_0(t)| = \Re\left(e^{-i\theta}(2t-1)f_0(t)\right) = 0 \qquad \forall t \in [0,1].$$

De aquí, se deduce que $e^{-i\theta}(2t-1)f_0(t)$ es un número real no negativo para todo $t \in [0,1]$, luego:

$$e^{-i\theta}f_0(t) = \frac{|2t-1||f_0(t)|}{2t-1} \Longrightarrow f_0(t) = e^{i\theta}\frac{|2t-1|}{2t-1} \qquad \forall t \in [0,1] \setminus \{1/2\}.$$

Estudiemos la continuidad en $t = 1/2$:

$$\lim_{t\to 1/2^-} f_0(t) = \lim_{t\to 1/2^-} e^{i\theta}\frac{|2t-1|}{2t-1} = \lim_{t\to 1/2^-} e^{i\theta}\frac{-(2t-1)}{2t-1} = -e^{i\theta},$$
$$\lim_{t\to 1/2^+} f_0(t) = \lim_{t\to 1/2^+} e^{i\theta}\frac{|2t-1|}{2t-1} = \lim_{t\to 1/2^+} e^{i\theta}\frac{2t-1}{2t-1} = e^{i\theta}.$$

Como f_0 es continua, se tiene que $e^{i\theta} = -e^{i\theta}$. No existe ningún número complejo con módulo 1 que cumpla esta igualdad, por lo que se llega a una contradicción. Por lo tanto, φ no alcanza su norma.

c) ¿Existe $x^{**} \in X^{**}$ con $\|x^{**}\| = 1$ tal que $x^{**}(\varphi) = \|\varphi\|$? Justifique su respuesta.

Ejercicio 2. Rodee las afirmaciones verdaderas (que pueden ser una, dos, tres o cuatro):

a) Sea X un subespacio cerrado de ℓ_{3000} de dimensión infinita ¿Puede ser X isomorfo a ℓ_1?

   a1) Si, porque $\ell_1 \subseteq \ell_{3000}$

   a2) No, porque $\ell_1 \nsubseteq \ell_{3000}$

   a3) No, porque ℓ_1 es separable y X no lo es

   a4) No, porque X^* es separable y ℓ_1^* no lo es

b) Sea $\psi\colon \ell_2 \to \mathbb{R}$ el funcional lineal dado por $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{n}$ para $x \in \ell_2$:

   b1) ψ alcanza su norma porque ℓ_2 es reflexivo

   b2) ψ alcanza su norma porque ℓ_2 es un espacio de Hilbert

b3) ψ no alcanza su norma

b4) ψ no alcanza su norma porque ℓ_2 no es completo

c) Sea $Y = \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ (el espacio vectorial de las sucesiones casi nulas):

c1) la norma de la suma y la norma del máximo son equivalentes en Y

c2) la norma de la suma y la norma del máximo no son equivalentes en Y

c3) cualesquiera dos normas definidas en Y son equivalentes

c4) no se puede definir ninguna norma en Y

Veamos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ no son equivalentes en Y. Para ello, fijado $n \in \mathbb{N}$, consideremos la sucesión:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} e_k \in Y,$$

donde e_k es la sucesión que tiene un 1 en la posición k y 0 en el resto de posiciones. Claramente $x_n \in Y$ y se tiene que:

$$\|x_n\|_1 = n \quad \text{y} \quad \|x_n\|_\infty = 1.$$

Por tanto, si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ fueran equivalentes, existiría una constante $C > 0$ tal que:

$$n = \|x_n\|_1 \leqslant C\|x_n\|_\infty = C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esto es imposible, por lo que se concluye que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ no son equivalentes en Y. Por lo tanto, la única afirmación verdadera es la **c2)**.

d) En un espacio normado X tomamos un conjunto convexo y cerrado C y un punto $x_0 \notin C$:

d1) existe $f \in X^*$ tal que $\sup \operatorname{Re} f(C) \leqslant \operatorname{Re} f(x_0)$

d2) existe $f \in X^*$ tal que $\sup \operatorname{Re} f(C) < \operatorname{Re} f(x_0)$

d3) no se puede asegurar que C se pueda separar de x_0 si el interior de C es vacío

d4) existe un único $f \in X^*$ tal que $\sup \operatorname{Re} f(C) \leqslant \operatorname{Re} f(x_0)$

e) Sea Z un espacio normado de dimensión finita:

e1) cualquier aplicación lineal que sale de Z es abierta

e2) cualquier aplicación lineal que llega a Z es continua

e3) cualquier aplicación lineal sobreyectiva que llega a Z es abierta

e4) cualquier aplicación lineal que sale de Z es continua

Suponemos que todos los espacios vectoriales son normados, pues en necesario considerar una topología para poder hablar de continuidad y de aplicaciones abiertas. En el caso de la asignatura de Análisis Funcional, la topología empleada, salvo que se indique lo contrario, es la topología inducida por la norma.

- Consideramos el operador nulo:

$$\begin{array}{rccc} T: & Z & \longrightarrow & X \\ & z & \longmapsto & 0 \end{array}$$

  Este operador es lineal y no es abierto, por lo que la afirmación **e1)** es falsa.

- Se ha visto en teoría que, si X es un espacio normado de dimensión infinita, entonces existe un funcional lineal $f \in X^*$ que no es continuo. Por lo tanto, la afirmación **e2)** es falsa.

  Veamos cuál podría ser un ejemplo de un funcional lineal no continuo. Consideremos el espacio normado c_{00}, que sabemos es de dimensión infinita y tiene una base canónica $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Definimos el funcional lineal $f\colon c_{00} \to \mathbb{K}$ por:

$$f(e_n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

  Este funcional es lineal, pero no es continuo pues, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\|e_n\|_\infty = 1$ y $|f(e_n)| = n$, por lo que no existe una constante $C > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant C\|x\|_\infty$ para todo $x \in c_{00}$. Como $\dim \mathbb{K} = 1$ finita, se deduce que f es un funcional lineal no continuo que llega a un espacio de dimensión finita. Por lo tanto, la afirmación **e2)** es falsa.

- Dado un operador lineal $T\colon X \to Z$ con Z de dimensión finita sobreyectivo se puede descomponer (algebraicamente) como $T = \tilde{T} \circ q$, donde:
  - $q\colon X \to X/\ker(T)$ es la aplicación proyección en el cociente, que es lineal.
  - $\tilde{T}\colon X/\ker(T) \to Z$ es un isomorfismo (algebraico) entre espacios vectoriales de dimensión finita. Como $\dim(X/\ker(T)) = \dim(Z)$ es finita, $\tilde{T}$ es continua y abierta.

  Si T fuese continuo, entonces $\ker(T)$ sería cerrado y, por lo tanto, se le podría dotar al cociente $X/\ker(T)$ de la norma del cociente, con lo que q sería abierta y, por lo tanto, T sería abierta. No obstante, si T no es continuo, entonces $\ker(T)$ no es cerrado y no se le puede dotar al cociente $X/\ker(T)$ de la norma del cociente, por lo que es necesario emplear otro enfoque.

- Por un corolario del Teorema de Hausdorff, todo operador lineal entre espacios normados en el que el dominio es de dimensión finita es continuo. Por lo tanto, la afirmación **e4)** es verdadera.